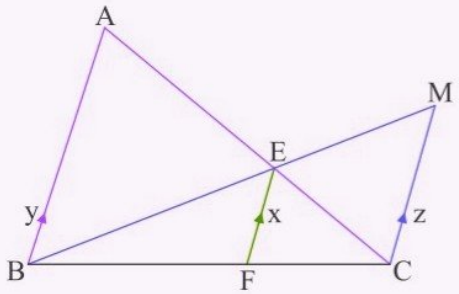
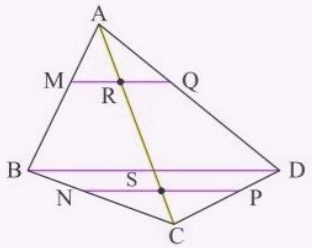
آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **هندسه**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۲ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

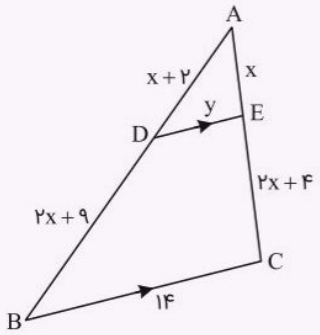
۱ در شکل زیر ثابت کنید: $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$



۲ در شکل زیر، $MQ \parallel BD \parallel NP$ ثابت کنید: $\frac{MR}{RQ} = \frac{NS}{SP}$



۳ در شکل زیر $BC \parallel DE$ می‌باشد. مقادیر x و y را محاسبه کنید.



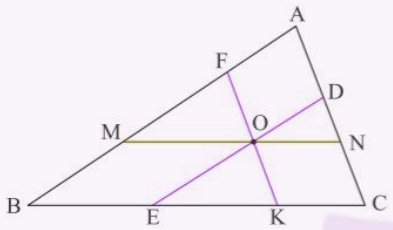
۴ در چهار ضلعی محدب $ABCD$ ثابت کنید:

$AC + BD > AB + CD$

۵ اگر $\frac{a^۲}{b^۲} = \frac{a^۲ - c^۲}{b^۲ - d^۲}$، ثابت کنید $\frac{a}{b} = \pm(\frac{c}{d})$.

۶ نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۲۱ باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگ‌تر چند است؟ نسبت محیط مثلث بزرگ‌تر به محیط مثلث کوچک‌تر را به دست آورید.

۷ در شکل زیر از نقطهٔ O سه خط به موازات اضلاع مثلث ABC رسم شده است. ثابت کنید:



الف

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{AC} = ۱$$

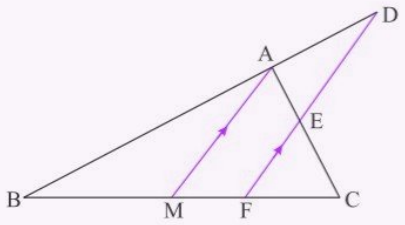
ب

$$\frac{BF}{AB} + \frac{CE}{BC} + \frac{AN}{AC} = ۲$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۸ ثابت کنید تنها چندضلعی محدبی که سه زاویهٔ ۶۰° دارد مثلث متساوی‌الاضلاع است.

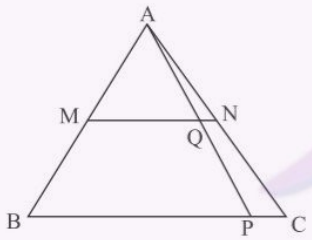
در شکل زیر، M وسط BC است.



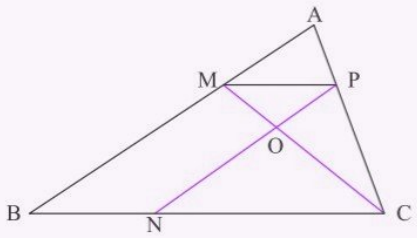
۹ مقدار هریک از نسبت‌های $\frac{AE}{MF}$، $\frac{AD}{AE}$ و $\frac{AD}{MF}$ را برحسب اضلاع مثلث بیابید.

۱۰ ثابت کنید: $۲FE + ED = ۲AM$

۱۱ در مثلث ABC خط MN موازی BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{۱}{۳}$، همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{۱}{۴}$ است. $S(AQN)$ چه کسری از مساحت ABC است؟



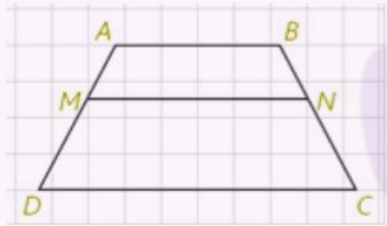
۱۲ در شکل زیر، چهار ضلعی $BMPN$ متوازی‌الاضلاع است و $\frac{AM}{MB} = \frac{۱}{۲}$. مساحت مثلث OMP چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱۳ در ذوزنقهٔ زیر $MN||AB||CD$ است، ثابت کنید:

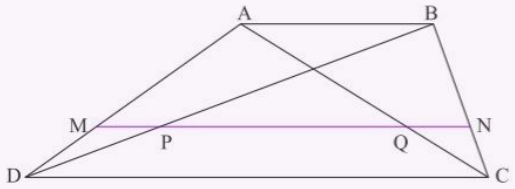
$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ (قضیهٔ تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



۱۴ در مثلث ABC، نیمساز AD را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ و طول BD و DC را برحسب اضلاع مثلث بیابید.

۱۵ در ذوزنقهٔ زیر، MN با قاعده‌ها موازی است و $\frac{AM}{MD} = \frac{m}{n}$. ثابت کنید:



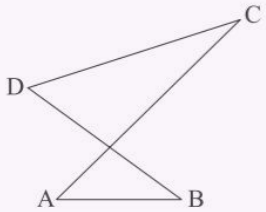
الف

$$MN = \frac{m.DC + n.AB}{m + n}$$

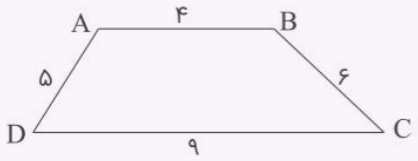
ب

$$PQ = \frac{m.DC - n.AB}{m + n}$$

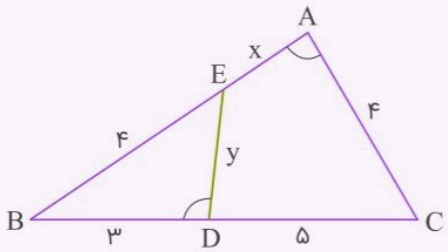
۱۶ در شکل زیر، داریم: $\widehat{C} < \widehat{D}$ و $\widehat{A} < \widehat{B}$. ثابت کنید $BD < AC$.



۱۷ در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۴ و ۹ و اندازهٔ ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که بیرون ذوزنقه و از برخورد امتداد ساق‌ها ساخته می‌شود چقدر است؟



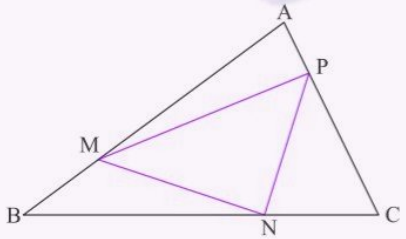
۱۸ در شکل زیر داریم: $B\hat{D}E = \hat{A}$. مقادیر x و y را به دست آورید.



۱۹ قضیه: ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر.

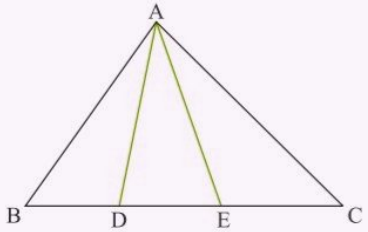
۲۰ اگر $\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴}$، مقدار عددی $\frac{۲a + ۳b + ۴c}{۵a - ۴b + ۳c}$ را بیابید.

۲۱ در شکل زیر، $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = ۳$. نسبت مساحت مثلث MNP به مثلث ABC را بیابید.



پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۲ در شکل زیر مساحت مثلث ACE چهار برابر مساحت مثلث ADE و سه برابر مساحت مثلث ABD است، نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



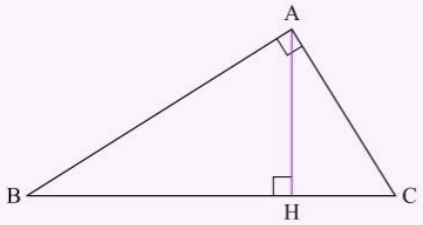
۲۳ در مثلث ABC از A عمودهای AM و AN را بر نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

الف MN با BC موازی است.

ب MN از وسط AB و AC می‌گذرد.

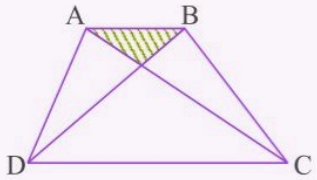
پ طول MN نصف محیط مثلث ABC است.

۲۴ در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر ثابت کنید دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و به کمک آن نشان دهید AH واسطه هندسی بین BH و HC است.



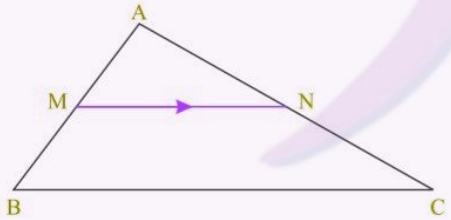
۲۵ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به قاعده‌های ۴ و ۱۲ و ارتفاع ۱۵ واحد، فاصلهٔ محل برخورد قطرها از محل برخورد امتدادهای ساق‌ها را بیابید.

۲۶ در ذوزنقهٔ زیر، قاعدهٔ بزرگ سه برابر قاعدهٔ کوچک است. مساحت کل ذوزنقه چندبرابر مساحت مثلث هاشورخورده است؟



۲۷ با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-۲) \times ۱۸۰$.

۲۸ در شکل زیر پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$

ب $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

پ $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

ت $\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{BC}$

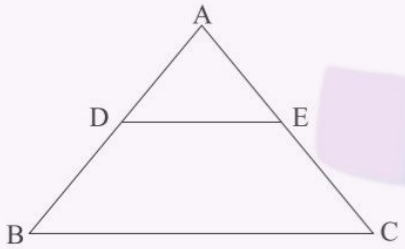
ث $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{CA} = \frac{MN}{BC}$

ج $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$

چ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

ح $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC}$

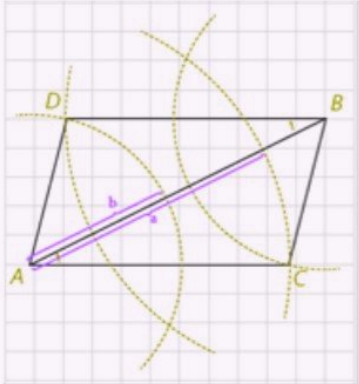
۲۹ ثابت کنید: اگر در مثلث زیر داشته باشیم $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$، آنگاه $DE||BC$.



۳۰ مثلث متساوی‌الساقین را با معلومات قاعده و یک زاویهٔ مجاور به آن، رسم کنید.

۳۱ پاره‌خط AB داده شده است. دهانهٔ پرگار را یک بار به‌اندازهٔ a و بار دیگر به‌اندازهٔ b باز می‌کنیم و از نقطهٔ A دو کمان می‌زنیم (به طوری که مجموع a و b از اندازهٔ AB بزرگ‌تر باشد)، سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این بار از نقطهٔ B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهار ضلعی ACBD چه نوع چندضلعی است؟ چرا؟

(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ABD}$ و زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ نسبت به هم چگونه‌اند.)

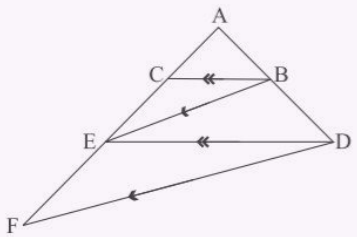


۳۲ لوزی را با معلومات ضلع و یک قطر آن، رسم کنید.

۳۳ نقاط M و N وسط‌های اضلاع AB و AC از مثلث ABC است. نسبت مساحت مثلث AMN به چهار ضلعی MNCB را بیابید.

۳۴ از نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y = ۱۲۰^\circ$ خطی عبور می‌دهیم تا اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع کند. ثابت کنید: $\frac{۱}{OA} = \frac{۱}{OB} + \frac{۱}{OC}$

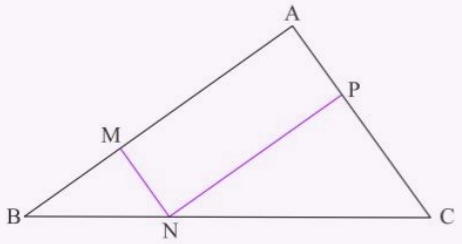
۳۵ در شکل زیر ثابت کنید: $AE^۲ = AC \times AF$



پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۶ اگر $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$، ثابت کنید: $\frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{ab + bc + cd} = \frac{ab + bc + cd}{b^۲ + c^۲ + d^۲}$

۳۷ در شکل زیر چهار ضلعی $AMNP$ مستطیل است. ثابت کنید: $S_{AMNP} = MB.PC$



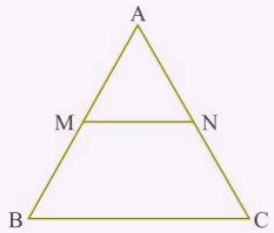
۳۸ مثلث متساوی‌الساقین را با معلومات قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده، رسم کنید.

۳۹ ثابت کنید: اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n^۲$ عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.

۴۰ ذوزنقه را با معلومات دو قاعده و دو قطر آن، رسم کنید.

۴۱ در شکل زیر $BC \parallel MN$ و مساحت ذوزنقهٔ $MNCB$ پانزده برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org



۴۲ مثلث ABC را با معلومات (b, c, m_a) رسم کنید.

۴۳ موارد زیر را ثابت کنید.

الف اگر وتر و یک ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با همین اجزا از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری، نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث، متشابه‌اند.

ب اگر یک ضلع قائمه و میانهٔ وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با همین اجزا از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری، نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث، متشابه‌اند.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **هندسه**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۲۲ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱

$$\overset{\Delta}{ABC} : EF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{BC} = \frac{EF}{AB} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{BC - CF}{BC} = \frac{AB - EF}{AB}$$

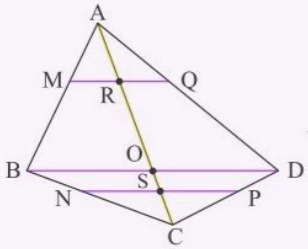
$$\Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{AB - EF}{AB} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{BMC} : EF \parallel MC \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{MC} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{EF}{MC} = \frac{AB - EF}{AB} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y - x}{y} \Rightarrow \frac{x}{z} = ۱ - \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{z} + \frac{x}{y} = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی تقسیم بر } x} \frac{۱}{z} + \frac{۱}{y} = \frac{۱}{x}$$

۲



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABO} : MR \parallel BO \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MR}{BO} = \frac{AR}{AO} \\ \overset{\Delta}{ADO} : RQ \parallel OD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{RQ}{OD} = \frac{AR}{AO} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MR}{BO} = \frac{RQ}{OD}$$

$$\Rightarrow \frac{MR}{RQ} = \frac{BO}{OD} \quad (*)$$

به روش مشابه، در مثلث CBD نتیجه می‌شود:

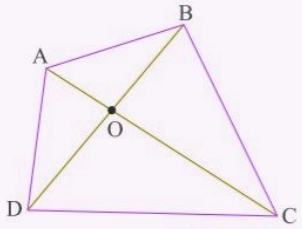
$$\frac{NS}{SP} = \frac{BO}{OD} \xrightarrow{(*)} \frac{NS}{SP} = \frac{MR}{RQ}$$

۳

$$\frac{x + ۲}{۲x + ۹} = \frac{x}{۲x + ۴} \Rightarrow x = ۸$$

$$\frac{x}{۳x + ۴} = \frac{y}{۱۴} \Rightarrow \frac{۸}{۲۸} = \frac{y}{۱۴} \Rightarrow y = ۴$$

۴ محل برخورد قطرها را O می‌نامیم. حال داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{OAB} : OA + OB > AB \\ \overset{\Delta}{OCD} : OC + OD > CD \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌زنیم}} \underbrace{OA + OC}_{AC} + \underbrace{OB + OD}_{BD} > AB + CD$$

$$\Rightarrow AC + BD > AB + CD$$

۵ طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{a^۲ - c^۲}{b^۲ - d^۲} = \frac{a^۲}{b^۲} = \frac{(a^۲ - c^۲) - a^۲}{(b^۲ - d^۲) - b^۲} = \frac{-c^۲}{-d^۲} = \frac{c^۲}{d^۲} \Rightarrow \frac{a^۲}{b^۲} = \frac{c^۲}{d^۲} \Rightarrow \frac{a}{b} = \pm(\frac{c}{d})$$

۶

$$\frac{S}{S'} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\frac{۲۱}{x} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow x = ۲۴\sqrt{۲}$$

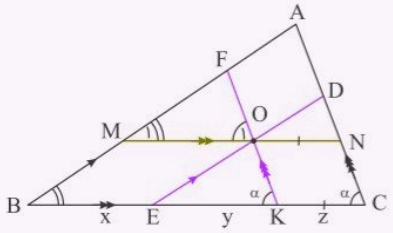
$$\frac{S}{S'} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{P}{P'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\frac{۸\sqrt{۲}}{۷} = \frac{P'}{P} = \frac{\text{محیط بزرگ‌تر}}{\text{محیط کوچک‌تر}}$$

۷

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

الف



$OMBE$ متوازی‌الاضلاع است $\Rightarrow BE = OM \quad (*)$

به‌طور مشابه $ONCK$ نیز متوازی‌الاضلاع است.

$$\hat{M}_1 = \hat{B}, \hat{O}_1 = \hat{C} \Rightarrow F\overset{\Delta}{M}O \sim A\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{OM}{BC} = \frac{MF}{AB}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{BE}{BC} = \frac{MF}{AB} \quad (**)$$

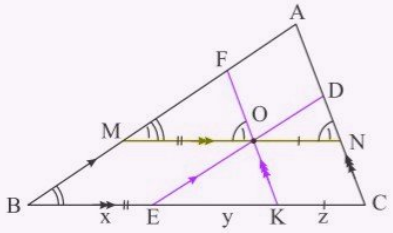
$$A\overset{\Delta}{B}C : MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NC}{AC} = \frac{MB}{AB} \quad (***)$$

$$(**), (***) \Rightarrow \frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{AC} = \frac{AF}{AB} + \frac{MF}{AB} + \frac{MB}{AB}$$

$$= \frac{AF + MF + MB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

ب



$$\hat{N}_۱ = \hat{C}, \hat{M}_۱ = \hat{B} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}N \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (*)$$

متوازی‌الاضلاع‌اند $ONCK$ و $OMBE$ $\Rightarrow OM = EB \ , \ ON = CK$

$$MN = OM + ON \Rightarrow MN = BE + KC \xrightarrow{(*)} \frac{AN}{AC} = \frac{BE + KC}{BC} \quad (**)$$

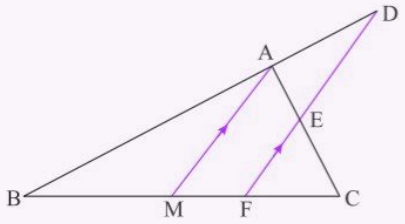
$$B\overset{\Delta}{A}C : FK \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BF}{AB} = \frac{BK}{BC} \quad (***)$$

$$(**), (***) \Rightarrow \frac{BF}{AB} + \frac{CE}{BC} + \frac{AN}{AC} = \frac{BK}{BC} + \frac{CE}{BC} + \frac{BE + KC}{BC}$$

$$= \frac{(x+y) + (y+z) + (x+z)}{x+y+z} = \frac{۲(x+y+z)}{(x+y+z)} = ۲$$

۸ فرض کنیم یک چندضلعی محدب، سه زاویهٔ داخلی ۶۰° دارد. پس این چندضلعی، سه زاویهٔ خارجی ۱۲۰° دارد که مجموع آن‌ها ۳۶۰° می‌شود. از طرف دیگر می‌دانیم مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی محدب، ۳۶۰° است، پس این چندضلعی، زاویهٔ دیگری ندارد و درنتیجه یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

پاسخ سؤالات ۹ تا ۱۰



$$\overset{\Delta}{CAM} : EF \parallel AM \xrightarrow{\text{تالس}} \begin{cases} \dfrac{CE}{CA} = \dfrac{CF}{CM} \Rightarrow \dfrac{CE}{CF} = \dfrac{CA}{CM} \\ \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{CF}{FM} \Rightarrow \dfrac{CE}{CF} = \dfrac{EA}{FM} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{FM} = \frac{CA}{CM} = \frac{b}{\frac{a}{۲}} = \frac{۲b}{a}$$

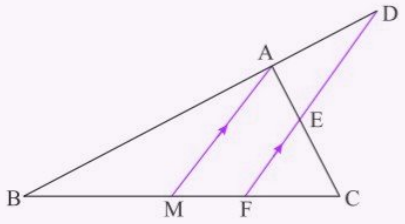
$$\overset{\Delta}{BDF} : MA \parallel FD \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MF}{BM} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AD}{AB} = \frac{MF}{BM} = \frac{MF}{MC}$$

$$\xrightarrow{\text{تالس در } \overset{\Delta}{CAM}} \frac{MF}{MC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\overset{\Delta}{BDF} : MA \parallel FD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{MF}{MB} \Rightarrow \frac{AD}{MF} = \frac{AB}{MB} = \frac{c}{\frac{a}{۲}} = \frac{۲c}{a}$$

۱۰



$$B\overset{\Delta}{F}D : MA \parallel FD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{FD} = \frac{BM}{BF} \Rightarrow \frac{FD}{MA} = \frac{BF}{BM} \quad (*)$$

$$C\overset{\Delta}{A}M : FE \parallel MA \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FE}{MA} = \frac{CF}{CM} \quad (**)$$

طرفین دو رابطهٔ (*) و (**) را جمع می‌زنیم:

$$\frac{FD}{MA} + \frac{FE}{MA} = \frac{BF}{\underbrace{BM}_{\frac{a}{۲}}} + \frac{CF}{\underbrace{CM}_{\frac{a}{۲}}} = \frac{\overbrace{BF + CF}^{a}}{\frac{a}{۲}} = ۲ \Rightarrow \frac{FD}{MA} + \frac{FE}{MA} = ۲$$

$$\xrightarrow{\times MA} FD + FE = ۲MA \Rightarrow (FE + ED) + FE = ۲MA \Rightarrow ۲FE + ED = ۲MA$$

۱۱

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{PC}{PB} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{۱}{۵}$$

$$QN \| PC \Rightarrow AQN \sim APC$$

$$\frac{S(AQN)}{S(APC)} = \left(\frac{AN}{AC}\right)^{۲} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲} = \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲} = \frac{۱}{۱۶}$$

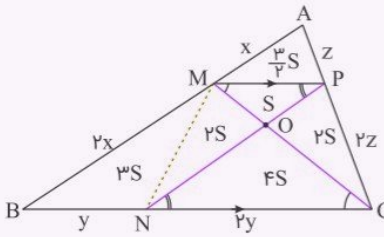
در دو مثلث APC و ABC قاعده‌های PC و BC از آن‌ها بر یک امتداد است، پس از رأس مشترک A ارتفاعشان یکی است.

$$\frac{S(APC)}{S(ABC)} = \frac{PC}{BC} = \frac{۱}{۵}$$

$$\frac{S(AQN)}{S(APC)} \times \frac{S(APC)}{S(ABC)} = \frac{۱}{۱۶} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۸۰}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۲ روش اول:



$$\overset{\Delta}{ABC}: MP \parallel BC \Rightarrow \frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow MP = y, BC = ۳y \xrightarrow{\text{متوازی‌الاضلاع است } BMPN} BN = y \Rightarrow NC = ۲y$$

$$\overset{\Delta}{OMP} \sim \overset{\Delta}{OCN} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{OMP}}}{S_{\overset{\Delta}{OCN}}} = \left(\frac{MP}{CN}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OMP}} = S, S_{\overset{\Delta}{OCN}} = ۴S$$

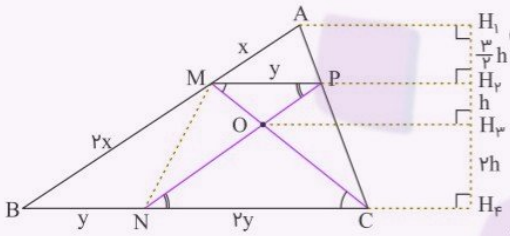
ذوزنقه است $MPCN \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OMN}} = S_{\overset{\Delta}{OPC}} = \sqrt{S_{\overset{\Delta}{OMP}} \times S_{\overset{\Delta}{OCN}}} = \sqrt{۴S^۲} = ۲S$

متوازی‌الاضلاع است $BMPN \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MBN}} = S_{\overset{\Delta}{MPN}} = ۳S$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MPA}}}{S_{\overset{\Delta}{MPC}}} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{MPA}}}{۳S} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MPA}} = \frac{۳}{۲}S$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۳S + ۴S + ۲S + ۲S + S + \frac{۳}{۲}S = \frac{۲۷}{۲}S \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{OMP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{S}{\frac{۲۷}{۲}S} = \frac{۲}{۲۷}$$

روش دوم: ابتدا همانند روش اول، طول پاره‌خط‌ها را یافته و نام‌گذاری کرده، سپس ارتفاع مثلث را رسم می‌کنیم. حال داریم:

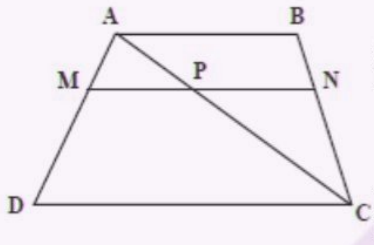


$$\overset{\Delta}{OMP} \sim \overset{\Delta}{OCN} \Rightarrow \frac{H_۲H_۳}{H_۳H_۴} = \frac{MP}{NC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow H_۲H_۳ = h, H_۳H_۴ = ۲h$$

$$\text{تالس}: \frac{H_۱H_۲}{H_۲H_۴} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{H_۱H_۲}{۳h} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow H_۱H_۲ = \frac{۳}{۲}h$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OMP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(MP)(H_۲H_۳)}{\frac{۱}{۲}(BC)(H_۱H_۴)} = \frac{\frac{۱}{۲}(y)(h)}{\frac{۱}{۲}(۳y)\left(\frac{۹}{۲}h\right)} = \frac{۲}{۲۷}$$

۱۳ یکی از قطرهای ذوزنقهٔ $ABCD$ مثلاً قطر AC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با پاره‌خط MN را P می‌نامیم. در مثلث $\overset{\Delta}{ADC}$ چون $MP \parallel DC$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:



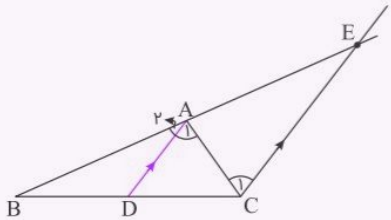
$$\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PC} \qquad (۱)$$

در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ چون $PN \parallel AB$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AP}{PC} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

۱۴ از C خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در نقطهٔ E قطع کند. حال داریم:



$$DA \parallel CE \Rightarrow \widehat{A}_۲ = \widehat{E}\,,\ \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱ \xrightarrow{\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲} \widehat{E} = \widehat{C}_۱$$

$$\overset{\Delta}{ACE} : \widehat{E} = \widehat{C}_۱ \Rightarrow AE = AC \ (*)$$

$$\overset{\Delta}{BCE} : DA \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \xrightarrow{(*)} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

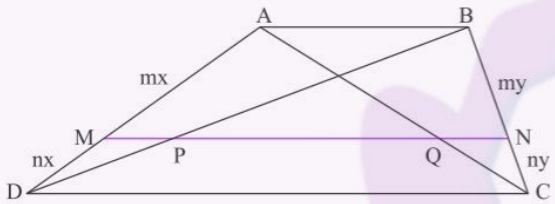
اگر قرار دهیم $AC = b$، $AB = c$ و $BC = a$، به کمک رابطهٔ فوق، طول BD و DC را می‌یابیم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{\underbrace{BD + DC}_{a}} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c}$$

به روش مشابه:

$$\Rightarrow DC = \frac{ab}{b+c}$$

۱۵ **الف** فرض کنیم $AM = mx$ و $MD = nx$، حال داریم:



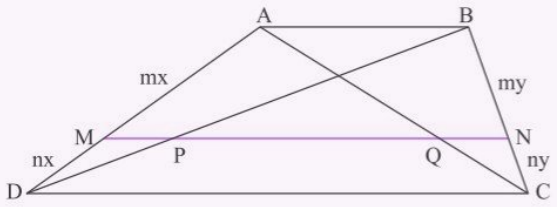
$$MN \parallel AB \parallel DC \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} = \frac{m}{n} \Rightarrow BN = my\,,\ NC = ny$$

$$\overset{\Delta}{ADC} : MQ \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MQ}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow MQ = \frac{m.DC}{m+n} \ (*)$$

$$\overset{\Delta}{CBA} : QN \parallel AB \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{n}{m+n} \Rightarrow QN = \frac{n.AB}{m+n} \ (**)$$

$$MN = MQ + QN \xrightarrow{(*),(**)} MN = \frac{m.DC + n.AB}{m+n}$$

ب ابتدا همانند قسمت (الف)، طول پاره‌خط‌های تشکیل‌شده روی ساق‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم:



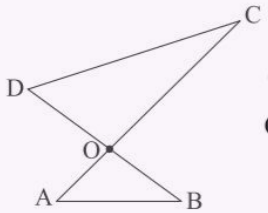
حال داریم:

$$\overset{\Delta}{ADC} : MQ \parallel DC \Rightarrow \frac{MQ}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow MQ = \frac{m.DC}{m+n} \ (*)$$

$$\overset{\Delta}{DAB} : MP \parallel AB \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{n}{m+n} \Rightarrow MP = \frac{n.AB}{m+n} \ (**)$$

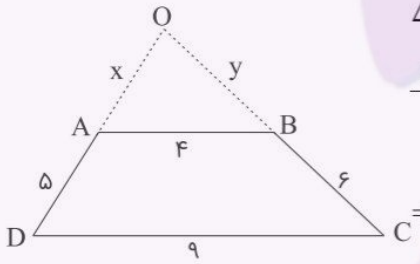
$$PQ = MQ - MP \xrightarrow{(*),(**)} PQ = \frac{m.DC - n.AB}{m+n}$$

۱۶ مطابق شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{OAB} : \hat{A} < \hat{B} \Rightarrow OB < OA \\ \overset{\Delta}{OCD} : \hat{C} < \hat{D} \Rightarrow OD < OC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع می‌زنیم}} OB + OD < OA + OC \Rightarrow BD < AC$$

۱۷



$$\Delta ODC : AB \| DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{OA=x\,,\,OB=y} \frac{x}{x+۵} = \frac{y}{y+۶} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۰ \Rightarrow ۵x = ۲۰ \Rightarrow x = ۴ \\ \frac{y}{y+۶} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۴ \Rightarrow ۵y = ۲۴ \Rightarrow y = \frac{۲۴}{۵} \Rightarrow y = ۴/۸ \end{cases}$$

$$P_{\Delta OAB} = OA + OB + AB = x + y + ۴ = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

۱۸

$$\overset{\Delta}{ABC} \underset{\text{ز ز}}{\sim} \overset{\Delta}{BDE} \Rightarrow \frac{۴}{۸} = \frac{y}{۴} = \frac{۳}{x+۴} \Rightarrow y = ۲\,,\ x = ۲$$

۱۹ چون طبق فرض $AC > AB$ بنابراین پاره‌خط AM را به اندازهٔ AB روی AC جدا می‌کنیم و از نقطهٔ M به B وصل می‌کنیم. چون $AB = AM$ پس مثلث ABM متساوی‌الساقین است درنتیجه: $(I)\ \hat{B}_۱ = \hat{M}_۱$

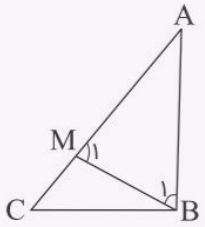
از طرفی چون زاویهٔ $M_۱$ یک زاویهٔ خارجی مثلث MBC است، درنتیجه از هریک از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین:

$(II)\ \hat{M}_۱ > \hat{C}$

باتوجه‌به دو رابطهٔ I و II : $(III)\ \hat{B}_۱ > \hat{C}$

زاویهٔ $\hat{B}_۱$ جزئی از زاویهٔ $\hat{B}$ است یعنی: $(IV)\ \hat{B} > \hat{B}_۱$

از مقایسهٔ III و IV نتیجه می‌شود $B > C$.



۲۰

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a\times ۲}{۲\times ۲}=\frac{۲a}{۴}\\ \frac{b\times ۳}{۳\times ۳}=\frac{۳b}{۹}\\ \frac{c\times ۴}{۴\times ۴}=\frac{۴c}{۱۶}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۲a}{۴}+\frac{۳b}{۹}+\frac{۴c}{۱۶}=\frac{۲a+۳b+۴c}{۲۹}=\frac{a}{۲}\ (*)$$

$$۲a+۳b+۴c=\frac{۲۹a}{۲}$$

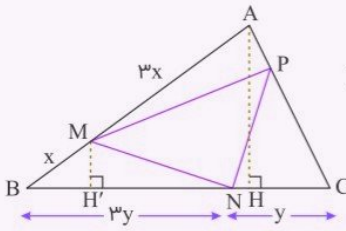
$$\left.\begin{array}{l}\frac{a\times ۵}{۲\times ۵}=\frac{۵a}{۱۰}\\ \frac{b\times(-۴)}{۳\times(-۴)}=\frac{-۴b}{-۱۲}\\ \frac{c\times ۳}{۴\times ۳}=\frac{۳c}{۱۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۵a}{۱۰}+\frac{-۴b}{-۱۲}+\frac{۳c}{۱۲}=\frac{۵a-۴b+۳c}{۱۰}=\frac{a}{۲}\ (**)$$

$$۵a-۴b+۳c=\frac{۱۰a}{۲}$$

$$\frac{۲a+۳b+۴c}{۵a-۴b+۳c}=\frac{\frac{۲۹a}{۲}}{\frac{۱۰a}{۲}}=\frac{۲۹}{۱۰}$$

۲۱ از A و M بر BC عمود می‌کنیم:

حال داریم:



$$\overset{\Delta}{BAH} : MH' \parallel AH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MH'}{AH} = \frac{BM}{BA} = \frac{۱}{۴} \ (*)$$

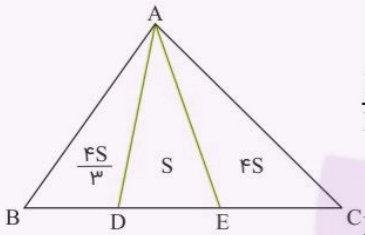
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}BN \times MH'}{\frac{۱}{۲}BC \times AH} = (\frac{BN}{BC})(\frac{MH'}{AH}) \overset{(*)}{=} (\frac{۳}{۴})(\frac{۱}{۴}) = \frac{۳}{۱۶}$$

به روش مشابه:

$$S_{\overset{\Delta}{AMP}} = S_{\overset{\Delta}{CNP}} = S_{\overset{\Delta}{BMN}} = \frac{۳}{۱۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} - (S_{\overset{\Delta}{AMP}} + S_{\overset{\Delta}{BMN}} + S_{\overset{\Delta}{CNP}}) = S_{\overset{\Delta}{ABC}} - \frac{۹}{۱۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۷}{۱۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{MNP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۷}{۱۶}$$

۲۲



$$\frac{DE}{BD} = ? \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{۱}{۲}\cancel{AH} \times DE}{\frac{۱}{۲}\cancel{AH} \times BD} \Rightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{\cancel{S}}{\frac{۴}{۳}\cancel{S}} = \frac{۳}{۴}$$

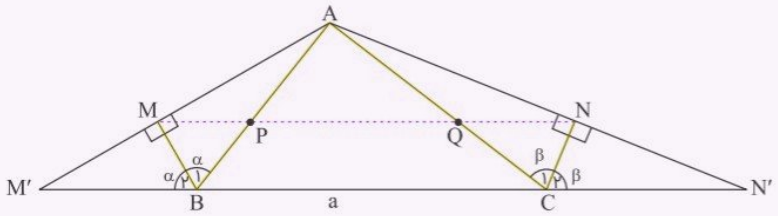
$$\frac{BC}{DE} = ? \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}} \times BC \times \cancel{AH}}{\cancel{\frac{۱}{۲}} \times DE \times \cancel{AH}} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{\frac{۱۹}{۳}\cancel{S}}{\cancel{S}} = \frac{۱۹}{۳}$$

$$\frac{۴S}{۱} + \frac{S}{۱} + \frac{۴S}{۳} = \frac{۱۲S + ۳S + ۴S}{۳} = \frac{۱۹S}{۳}$$

۲۳

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

الف AM و AN را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در M' و N' قطع کند. حال داریم:



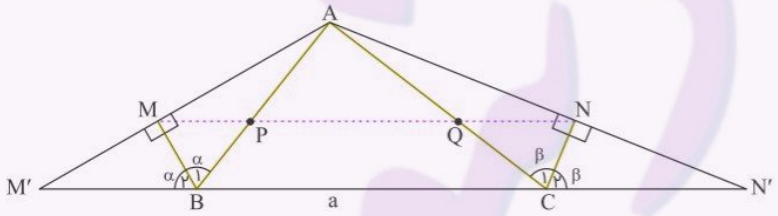
$$\begin{cases} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \\ BM = BM \\ A\hat{M}B = M'\hat{M}B = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}B \cong M'\overset{\Delta}{M}B \Rightarrow AM = MM', AB = BM'$$

به روش مشابه:

$$\Rightarrow AN = NN', AC = CN'$$

$$A\overset{\Delta}{M'}N' : \frac{AM}{MM'} = \frac{AN}{NN'} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel M'N' \Rightarrow MN \parallel BC$$

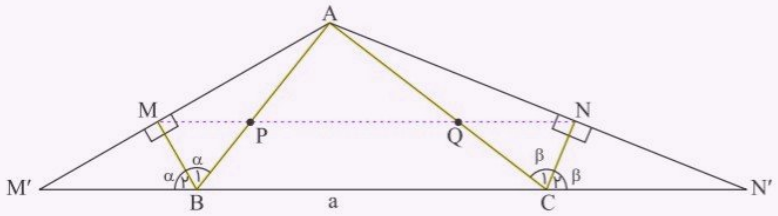
ب



$$A\overset{\Delta}{B}M' : MP \parallel M'B \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MM'} = ۱ \Rightarrow AP = PB$$

درنتیجه P وسط AB است و به روش مشابه Q وسط AC است.

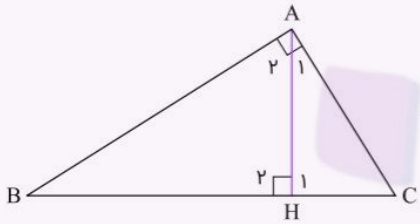
پ



$$MN \parallel M'N' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{M'N'} = \frac{AM}{AM'} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{\underbrace{M'B}_{AB} + BC + \underbrace{CN'}_{AC}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MN = \frac{۱}{۲}\left(\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) \text{ محیط}\right)$$

۲۴

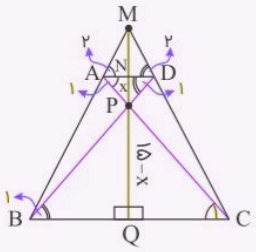


$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{A}_۱ \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ \\ \hat{C} = \hat{A}_۲ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH}$$

$$\Rightarrow AH^۲ = BH \times HC$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۵ نکته: می‌دانیم در هر ذوزنقه، محل برخورد قطرها و محل برخورد امتداد ساق‌ها روی خطی است که وسط‌های دو قاعدهٔ ذوزنقه را به هم وصل می‌کند.
حال چون این ذوزنقه، متساوی‌الساقین است، این خط بر قاعده‌ها عمود است و داریم:



$$AD \parallel BC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow P\overset{\Delta}{A}D \sim P\overset{\Delta}{C}B$$

$$\Rightarrow \frac{PN}{PQ} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۱۵ - x} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳x = ۱۵ - x \Rightarrow ۴x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۴}$$

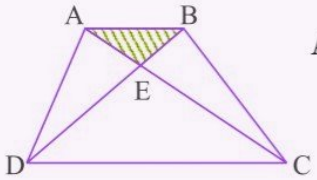
$$AD \parallel BC \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B}, \hat{D}_۲ = \hat{C} \Rightarrow M\overset{\Delta}{A}D \sim M\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{MN}{MQ} = \frac{AD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{MN + NQ} = \frac{۴}{۱۲} \Rightarrow \frac{MN}{MN + ۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳MN = MN + ۱۵ \Rightarrow ۲MN = ۱۵ \Rightarrow MN = \frac{۱۵}{۲}$$

$$MP = MN + NP = \frac{۱۵}{۲} + \frac{۱۵}{۴} = \frac{۴۵}{۴}$$

۲۶ محل برخورد قطرها را E می‌نامیم:



$$A\overset{\Delta}{B}E \sim D\overset{\Delta}{C}E \Rightarrow \frac{S_{D\overset{\Delta}{C}E}}{S_{A\overset{\Delta}{B}E}} = ۳^۲ = ۹$$

همچنین $A\overset{\Delta}{D}E$ و $A\overset{\Delta}{B}E$ مثلث‌هایی هم‌ارتفاع هستند؛ پس نسبت مساحتشان برابر نسبت قاعده‌شان است.

$$\frac{S_{A\overset{\Delta}{D}E}}{S_{A\overset{\Delta}{B}E}} = \frac{DE}{BE} = ۳$$

همین‌طور برای $B\overset{\Delta}{C}E$ داریم:

$$\frac{S_{B\overset{\Delta}{C}E}}{S_{A\overset{\Delta}{B}E}} = ۳$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{A\overset{\Delta}{B}E} + S_{B\overset{\Delta}{C}E} + S_{A\overset{\Delta}{D}E} + S_{D\overset{\Delta}{C}E} = ۱۶S_{A\overset{\Delta}{B}E}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۷ در اثبات این حکم از دو فرض استفاده می‌کنیم:

۱- مجموع هر زاویه و زاویهٔ خارجی آن (مکملش)، برابر ۱۸۰° است.

۲- مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی برابر ۳۶۰° است.

داریم:

$$\hat{A}+\hat{A}'=۱۸۰^\circ\ ,\ \hat{B}+\hat{B}'=۱۸۰^\circ\ ,...,\ \hat{Z}+\hat{Z}'=۱۸۰^\circ$$

که A و B و C و ... و Z زوایای داخلی n ضلعی و A' و B' و C' و ... و Z' زوایای خارجی n ضلعی هستند.

$$\hat{A}+\hat{A}'+\hat{B}+\hat{B}'+...+\hat{Z}+\hat{Z}'=n\times ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \underbrace{\left(\hat{A}+\hat{B}+...+\hat{Z}\right)}_{\text{مجموع زوایای داخلی}}+\underbrace{\left(\hat{A}'+\hat{B}'+...+\hat{Z}'\right)}_{\text{مجموع زوایای خارجی}=۳۶۰^\circ}=n\times ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+...+\hat{Z}=۱۸۰n-۳۶۰^\circ=۱۸۰n-۱۸۰\times ۲=۱۸۰\,(n-۲)$$

۲۸

الف نادرست

ب درست

پ درست

ت نادرست

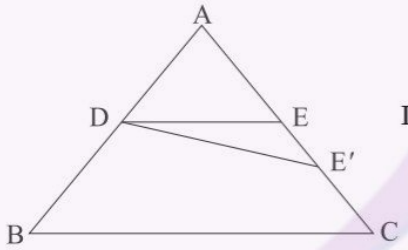
ث نادرست

ج درست

چ درست

ح نادرست

۲۹ به برهان خلف فرض می‌کنیم $DE \nparallel BC$، پس خط DE' را موازی BC رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} DE'||BC \xrightarrow{\text{بنا بر قضیه تالس}} \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE'}{E'C} \\ \text{طبق فرض}: \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$$

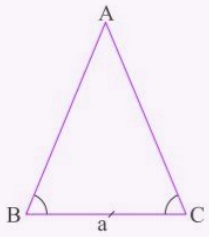
$$\xrightarrow{\text{ترکیب صورت در مخرج}} \frac{AE}{AE+EC}=\frac{AE'}{E'C+AE'} \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC}$$

$$\Rightarrow AE=AE'$$

یعنی نقطهٔ E و E' بر هم منطبق‌اند و DE' همان DE است، پس فرض خلف باطل؛ یعنی:

$$DE||BC$$

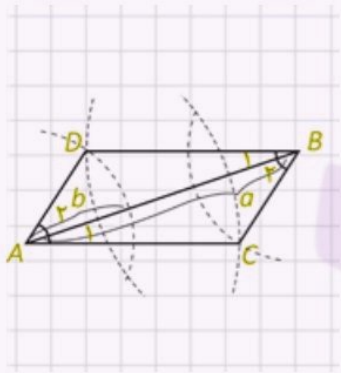
۳۰ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ اگر قاعدهٔ BC و زاویهٔ B معلوم باشند، آنگاه چون $\hat{B} = \hat{C}$، می‌توان مثلث را با معلومات دو زاویه و ضلع بین $(\hat{B}, \hat{C}, a)$ رسم کرد.



۳۱ AD شعاع دایره‌ای به مرکز A و BC شعاع دایره‌ای به مرکز B است. دو کمان با شعاع‌های برابر و مرکزهای مختلف رسم کرده‌ایم. چون BC=AD است می‌توان نتیجه گرفت DB=AC است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\Delta}{ADB}$ و $\overset{\Delta}{ACB}$ هم‌نهشت بوده و اجزای متناظر آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

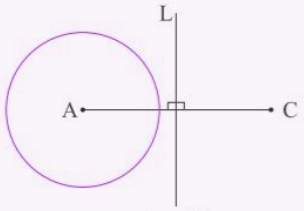
$$\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \ , \ \hat{A}_۲ = \hat{B}_۲ \ , \ \hat{C} = \hat{D}$$

طبق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورّب نتیجه می‌گیریم $DB || AC$ بوده و درنتیجه چهار ضلعی ACBD یک متوازی‌الاضلاع است.

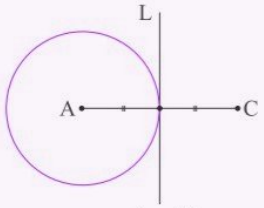


۳۲ فرض کنیم طول ضلع و قطر AC از لوزی $ABCD$ معلوم است. می‌دانیم قطرهای لوزی، عمودمنصف یکدیگرند، پس روش رسم به صورت زیر است:

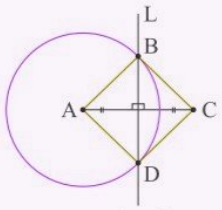
ابتدا قطر AC و خط L عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط L را در B و D قطع کند که وضعیت‌های زیر را داریم:



فاقد جواب



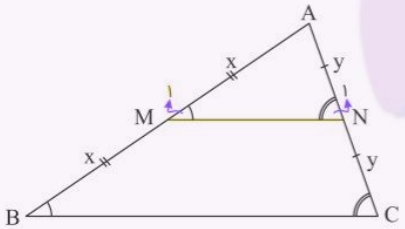
فاقد جواب



یک جواب

پس این مسئله حداکثر یک جواب دارد.

۳۳

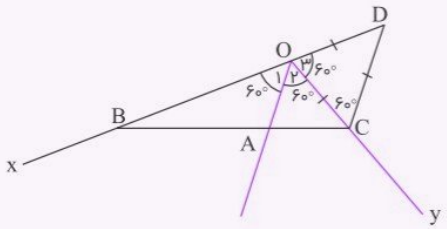


$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=۱\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN \parallel BC \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{B},\hat{N}_۱=\hat{C}\Rightarrow A\overset{\Delta}{M}N\sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{A\overset{\Delta}{B}C}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}\ (*)$$

$$S_{A\overset{\Delta}{M}N}=S\xrightarrow{(*)}S_{A\overset{\Delta}{B}C}=۴S\Rightarrow S_{MNCB}=۴S-S=۳S\Rightarrow\frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{MNCB}}=\frac{S}{۳S}=\frac{۱}{۳}$$

۳۴ از C خطی به موازات AO رسم می‌کنیم تا امتداد Ox را در نقطهٔ D قطع کند:



حال داریم:

$$OA \parallel DC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{O}_{۲} = ۶۰^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_{۳}=۶۰^\circ} \widehat{D} = ۶۰^\circ$$

پس مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است و $OC = CD = OD$. حال داریم:

$$\overset{\Delta}{BCD} : AO \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{DC} = \frac{OB}{BD} \ (*)$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{OA}{OB} = \frac{DC}{BD} \xrightarrow{OD=DC} \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{BD} \ (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{OA}{OC} + \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{BD} + \frac{OD}{BD} = \frac{BD}{BD} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times \frac{۱}{OA}} \frac{۱}{OC} + \frac{۱}{OB} = \frac{۱}{OA}$$

۳۵

$$\left.\begin{array}{l} BC \| DE \Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AD} \\ BE \| DF \Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AD} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^{۲} = AC \times AF$$

۳۶ فرض کنیم $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$، حال داریم:

$$a = bk \xrightarrow{\times a} a^{۲} = abk$$

$$b = ck \xrightarrow{\times b} b^{۲} = bck$$

$$c = dk \xrightarrow{\times c} c^{۲} = cdk$$

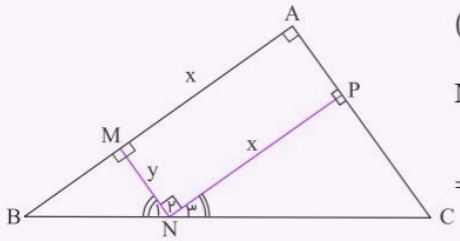
$$\frac{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}{ab + bc + cd} = \frac{abk + bck + cdk}{ab + bc + cd} = \frac{k(ab + bc + cd)}{(ab + bc + cd)} = k \ (*)$$

$$\frac{ab + bc + cd}{b^{۲} + c^{۲} + d^{۲}} = \frac{(bk)b + (ck)c + (dk)d}{b^{۲} + c^{۲} + d^{۲}} = \frac{(b^{۲} + c^{۲} + d^{۲})k}{(b^{۲} + c^{۲} + d^{۲})} = k \ (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow \frac{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}{ab + bc + cd} = \frac{ab + bc + cd}{b^{۲} + c^{۲} + d^{۲}}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۷ طول و عرض مستطیل را x و y فرض می‌کنیم. حال داریم:

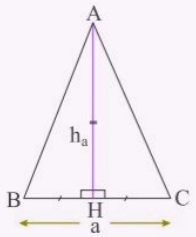


$$(AB \| PN)\ ,\ (\text{مورب}\ BC) \Rightarrow \hat{N}_{۳} = \hat{B}$$

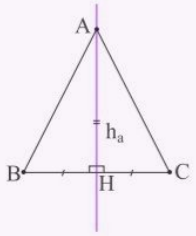
$$\hat{N}_{۳} = \hat{B}\ ,\ \hat{P} = \hat{M} \Rightarrow P\overset{\Delta}{N}C \underset{(\text{زز})}{\sim} M\overset{\Delta}{B}N$$

$$\Rightarrow \frac{PN}{MB} = \frac{PC}{MN} \Rightarrow \frac{x}{MB} = \frac{PC}{y} \Rightarrow MB.PC = xy = S_{AMNP}$$

۳۸ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، فرض می‌کنیم طول BC و AH معلوم است. چون AH عمودمنصف BC هم می‌باشد، روش رسم به‌صورت زیر است:



ابتدا پاره‌خط BC به طول a و سپس عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. حال پاره‌خط AH به طول h_a را روی عمودمنصف جدا می‌کنیم.



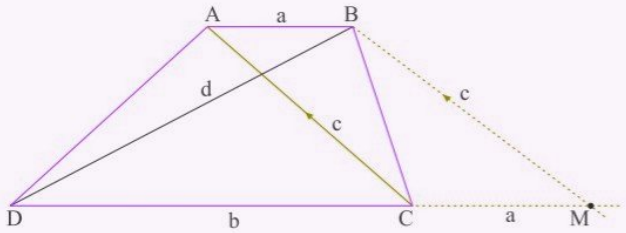
تمرین: ثابت کنید این مسئله حداکثر یک جواب دارد.

۳۹ به برهان خلف فرض می‌کنیم n عددی فرد نباشد، بنابراین n عددی زوج خواهد بود؛ یعنی $n = ۲k$.

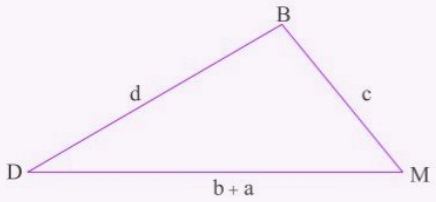
$$n^{۲} = ۴k^{۲} = ۲\underbrace{(۲k)}_{k'} = ۲k'$$

یعنی $n^{۲}$ نیز زوج می‌باشد و این با فرض مسئله در تناقض است.

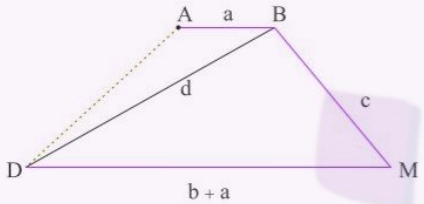
۴۰ در ذوزنقهٔ $ABCD$ ($AB \parallel DC$) فرض کنیم طول قاعده‌ها و قطرها معلوم است. از B خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا امتداد DC را در M قطع کند. پس چهار ضلعی $ABMC$ متوازی‌الاضلاع است و $BM = AC$. درنتیجه طول سه ضلع مثلث BMD معلوم و روش رسم، به صورت زیر است:



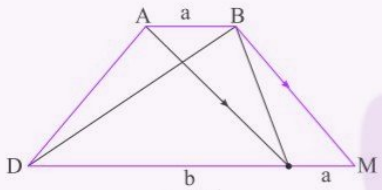
ابتدا مثلث BMD را با معلومات سه ضلع، رسم می‌کنیم. سپس از B پاره‌خط BA را به طول a به موازات MD (و در جهت M به D) رسم می‌کنیم تا نقطهٔ A به دست آید. در انتها از A خطی به موازات BM رسم می‌کنیم تا DM را در C قطع کند. سه گام آن زیر رسم شده است.



گام اول



گام دوم



گام سوم

۴۱

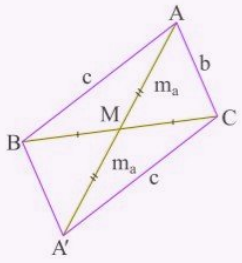
$$BC \parallel MN \Rightarrow AMN \sim ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MA}{AB}\right)^{۲}$$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{MNCB} + S_{AMN}} = \left(\frac{MA}{AB}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{۱۵S_{(AMN)} + S_{(AMN)}} = \left(\frac{MA}{AB}\right)^{۲}$$

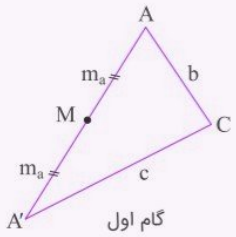
$$\left(\frac{MA}{AB}\right)^{۲} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{MA}{AB - MA} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{MB}{MA} = ۳$$

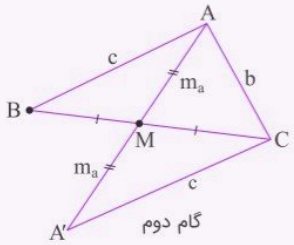
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۴۲ فرض کنیم مثلث ABC رسم شده است. میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' به دست آید. در چهار ضلعی $ABA'C$ قطرها یکدیگر را نصف کرده‌اند، پس این چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است. درنتیجه $CA' = AB = c$ و روش رسم، به‌صورت زیر است:



ابتدا مثلث ACA' را با معلومات سه ضلع ($AC = b$، $CA' = c$ و $AA' = ۲m_a$) رسم کرده و وسط AA' را M می‌نامیم. سپس C را به M وصل کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B به دست آید. هر مثلث دیگری که با این معلومات رسم شود، با مثلث ABC همنهشت است، پس این مسئله حداکثر یک جواب دارد.





تذکر: همان‌طور که دیدیم، مثلث ABC در صورتی وجود دارد که مثلث ACA' وجود داشته باشد پس شرط جواب داشتن این سؤال این است که اضلاع مثلث ACA' در نامساوی مثلثی صدق کند؛ یعنی:

$$b + c > ۲m_a$$
$$b + ۲m_a > c$$
$$c + ۲m_a > b$$

۴۳

الف

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) و $A'B'C'$ ($\hat{A}' = ۹۰^\circ$) را در نظر گرفته و اضلاع $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را a'، b' و c' می‌نامیم. فرض کنیم $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. حال داریم:

$$\frac{a^۲}{a'^۲} = \frac{b^۲}{b'^۲} \xrightarrow[a'^۲=b'^۲+c'^۲]{a^۲=b^۲+c^۲} \frac{b^۲+c^۲}{b'^۲+c'^۲} = \frac{b^۲}{b'^۲} \xrightarrow[\text{تناسب}]{\text{ویژگی‌های}} \frac{b^۲+c^۲-b^۲}{b'^۲+c'^۲-b'^۲} = \frac{b^۲}{b'^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{c^۲}{c'^۲} = \frac{b^۲}{b'^۲} \Rightarrow \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

تذکر: به کمک نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های حادهٔ دو مثلث هم می‌توانستیم درستی حکم را اثبات کنیم.

ب

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است، پس نسبت میانه‌های وارد بر وتر این دو مثلث، همان نسبت وترهای آن‌ها است و طبق قسمت اول، دو مثلث، متشابه‌اند.